Concours DUT 2022 Ecrit de mathématique

Cette épreuve comporte 40 questions et compte un total de 120 points. Le barème de chaque question peut varier entre 2 et 6 points. Toute réponse fausse entraîne une pénalité de 1 point. Pour les questions de type QCM (questionnaire à choix multiple), il n'y a qu'une seule bonne réponse à chaque question. Pour les questions de type calcul (valeur à déterminer), la réponse attendue est un entier.

Pensez à bien cliquer sur **enregistrer** après avoir répondu à **chaque** question.

Question 1 — **Question à réponse unique**

[2 points] On pose $A = \dfrac{100\,001}{1\,000\,000}$ et $B = \dfrac{1\,000\,000}{9\,999\,999}$. Laquelle de ces assertion est vraie ?

A - $A > B$

B - $A = B$

C - $A < B$

D - Il n'est pas possible de comparer ces deux nombres.

Question 2 — **Question à réponse unique**

[2 points] Soit E, F et G trois ensembles. On appelle A l'ensemble $A = (E \times G) \cup (F \times G)$ et B l'ensemble $B = (E \cup F) \times G$. Alors

A - on a l'égalité $A = B$.

B - on a l'inclusion stricte $B \subseteq A$ mais $B \neq A$.

C - si e est un élément de $E \cup G$ et f un élément de $F \cup G$, alors le couple (e, f) appartient à A.

D - si g est un élément de G, alors g appartient à B

Question 3 — **Question à réponse unique**

[2 points] Nier l'affirmation "la fonction $f : x \mapsto f(x)$ est croissante sur tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$."

A - Aucune des autres réponses n'est correcte.

B - Il existe deux réels a et b tels que $f(a) > f(b)$.

C - Il existe deux réels a et b tels que $f(a) < f(b)$.

D - Sur tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, la fonction f est décroissante.

E - Sur tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement décroissante.

F - Il existe un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est décroissante.

Question 4 — **Question valeur numérique**

[3 points] Trouver deux entiers relatifs n et p tels que le nombre $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}}$ s'écrive sous la forme $2^n 3^p$.

La valeur de n est

La valeur de p est

Question 5 — **Question valeur numérique**

[4 points] Donner la partie réelle a et la partie imaginaire b du nombre complexe $(1+2\mathrm{i})^2(1-2\mathrm{i})^2$ où i est le nombre tel que $\mathrm{i}^2=-1$.

La partie réelle a vaut

La partie imaginaire b vaut

Question 6 — **Question à réponse unique**

[4 points] Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi,\pi[$. On pose $x=-\dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos\theta/2}$. Pour tout choix de θ, le nombre $\exp(\mathrm{i}\theta)$ vaut

A - ○ $\dfrac{1-\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}x}$

B - ○ $\dfrac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$

C - ○ $\dfrac{-1+\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}x}$

D - ○ $\dfrac{1+\mathrm{i}x}{-1+\mathrm{i}x}$

E - ○ aucune des autres valeurs présentées.

Question 7 — **Question valeur numérique**

[3 points] Résoudre l'équation $\tan(3x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et en déduire un entier relatif m tel que $x=\dfrac{\pi}{m}$ est une solution de l'équation.

La valeur de m est

Question 8 **Question valeur numérique**

[4 points] Dans cette question, la notation $\log$ désigne le logarithme en base 2, autrement dit $\log 2 = 1$. Trouver un entier relatif p tel que $p = 4\log\left(\frac{1}{8}\right) - 8\log\left(\frac{1}{4}\right)$.

La valeur de p est

Question 9 **Question à réponse unique**

[2 points] Soit n un entier naturel non nul. L'équation $z^n = \overline{z}$ admet

A - ○ Exactement $n+2$ solutions complexes.

B - ○ Exactement $n+1$ solutions complexes.

C - ○ Exactement n solutions complexes.

D - ○ Exactement $n-1$ solutions complexes.

E - ○ Aucune des autres réponses n'est juste en toute généralité.

Question 10 **Question valeur numérique**

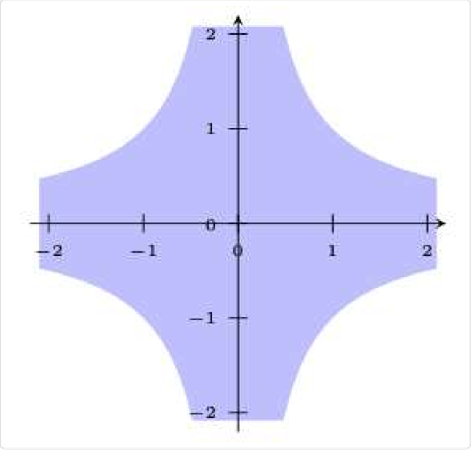
[4 points] Déterminer le plus petit réel x tel que $\ln(x+1) - \ln(x-5) = \ln(x-3)$.

La valeur de x est

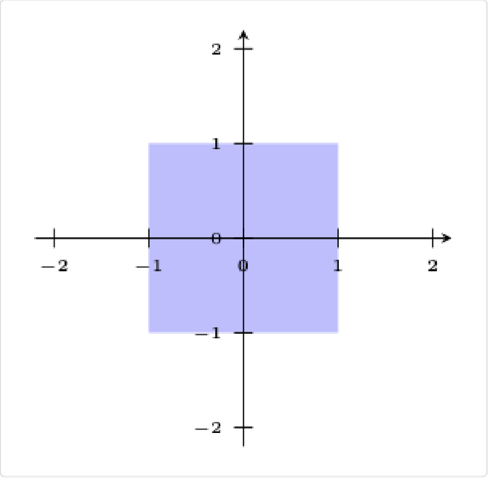
Question 11 **Question à réponse unique**

[2 points] A quelle figure l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|xy| \leq 1$ correspond-il ?

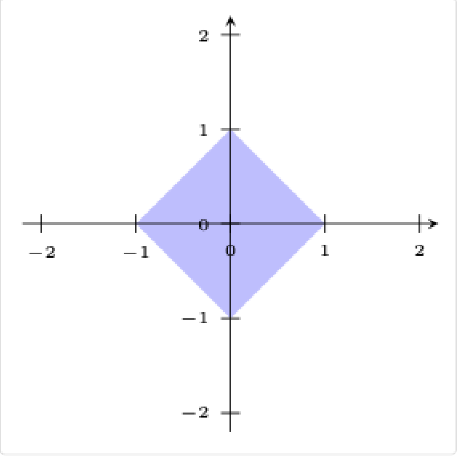
A - ○ La figure



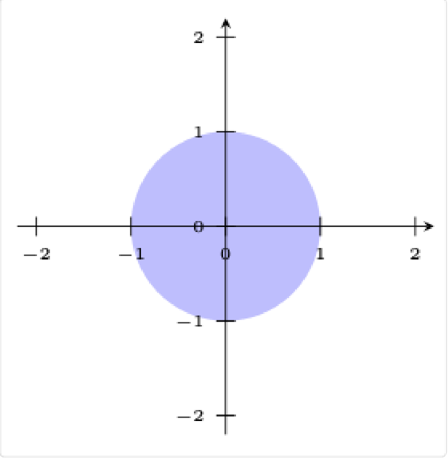
B - ○ La figure



C - ○ La figure



D - ○ La figure



Question 12 | **Question à réponse unique**

[2 points] Simplifier la fraction $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^{n} k}$ pour tout entier naturel non nul n, en utilisant la formule $1+2+\cdots+p = \frac{p(p+1)}{2}$.

A - ○ $\frac{(n^2+1)\,n}{n+1}$

B - ○ $n(n+1)\frac{(n^3+n)\,n}{n-1}$

C - ○ n^2-1

D - ○ $n(n+1)$

E - ○ Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 13 | **Question valeur numérique**

[4 points] Soit z un réel différent de 1. Trouver deux entiers relatifs a et b tels que $\frac{2z+1}{z-1} = a + \frac{b}{z-1}$.

Valeur de a

Valeur de b

Question 14 | **Question valeur numérique**

[4 points] Quel est le rang de la matrice
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 11 & 6 \end{pmatrix}$?

Le rang de $\mathbf{A}$ est

Question 15 — **Question à réponse unique**

[2 points] On se place dans un espace vectoriel E de dimension 3 muni de la base vectorielle $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.On définit une application linéaire f de E dans E par :

$$\begin{cases} f(\mathbf{i}) & = & \mathbf{u} & \text{où} & \mathbf{u} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ f(\mathbf{j}) & = & \mathbf{v} & \text{où} & \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ f(\mathbf{k}) & = & \mathbf{w} & \text{où} & \mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} \end{cases}$$

Alors

A - Le triplet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ n'est pas une base de E

B - Le triplet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de E

C - L'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} \in E$ tels que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ est $\{\mathbf{0}\}$.

D - L'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} \in E$ tels que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ est $\{\lambda \mathbf{x_0}; \lambda \in \mathbb{R}\}$ avec $\mathbf{x_0} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Question 16 — **Question valeur numérique**

[4 points] Soit $\mathbf{A}$ la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des coefficients α et β tels que $\mathbf{A}^2 = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{I}_2$.

La valeur de α est

La valeur de β est

Question 17 — **Question à réponse unique**

[2 points] Quel est le déterminant de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\ln(2) & \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ -2 & \ln(e) \end{pmatrix}?$$

A - 0

B - 1

C - $\ln(2)$

D - $-\ln(2)$

E - Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 18 **Question à réponse unique**

[2 points] Soit θ un réel non nul. Que vaut le déterminant de la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & \theta^2 \\ \frac{1}{\theta} & 0 & \theta \\ \frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{\theta} & 0 \end{pmatrix}$?

A - 2

B - 0 (en remarquant que la diagonale est nulle).

C - 1

D - θ

E - Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 19 **Question à réponse unique**

[2 points] Le produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ entre le vecteur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ vaut

A - $\begin{pmatrix} -29 \\ -22 \\ 6 \end{pmatrix}$

B - $\begin{pmatrix} 29 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix}$

C - 19

D - -19

E - Aucune des autres réponses.

Question 20 **Question à réponse unique**

[2 points] Déterminer l'angle entre les vecteurs $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

A - ○ L'angle mesure $\frac{\pi}{6}$.

B - ○ L'angle mesure $\frac{\pi}{4}$.

C - ○ L'angle mesure $\frac{\pi}{3}$.

D - ○ L'angle mesure $\frac{\pi}{2}$.

E - ○ Aucune des mesures proposées dans les autres réponses n'est juste.

Question 21 **Question à réponse unique**

[2 points] Soient $\mathbf{A}$ la matrice et $\mathbf{v}$ le vecteur suivants

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -40 & -20 & 120 \\ 27 & 15 & -78 \\ -9 & -5 & 26 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A - ○ Le vecteur $\mathbf{v}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre -4.

B - ○ Le vecteur $\mathbf{v}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 5.

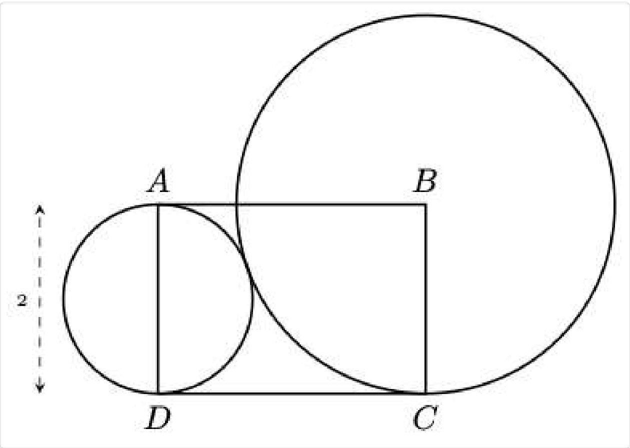
C - ○ La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

D - ○ La matrice $\mathbf{A}$ est inversible.

E - ○ Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 22 **Question valeur numérique**

[6 points] On considère la figure géométrique suivante, formée d'un rectangle $ABCD$ et de deux cercles tangents. Le premier cercle a pour diamètre AD. Le second cercle a pour centre B et rayon BC.
Le côté AD est de longueur 2. On note S l'aire du rectangle ABCD. Quelle est la valeur de S^2 ?



La valeur de S^2 est

Question 23 **Question valeur numérique**

[4 points] On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 2$ et par $\forall n \in \mathbb{N},\ \ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$. Déterminer un entier relatif t tel que $u_{16} = 2^t$.

La valeur de t est

Question 24 **Question à réponse unique**

[2 points] Soit f la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2022+x}{2022-x}\right)$. Alors

A - La fonction f est paire.

B - La fonction f est impaire.

C - La fonction f n'est ni paire, ni impaire.

D - Aucune des autres réponses ne s'applique.

Question 25 **Question à réponse unique**

[2 points] La limite de la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}\right)$ en $+\infty$ est

A - $\exp(-1)$

B - $\exp(1)$

C - -1

D - 0

E - 1

F - $-\infty$

G - $+\infty$

H - non définie.

Question 26 **Question à réponse unique**

[4 points] On rappelle le développement limité suivant
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O\left(x^{n+1}\right)$
valable au voisinage de 0.
Donner le développement limité de $\sqrt{1-2x}$ en 0 à l'ordre 3.

A - $1 - x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + O\left(x^4\right)$

B - $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + O\left(x^4\right)$

C - $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + O\left(x^4\right)$

D - $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + O\left(x^4\right)$

E - Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 27 **Question à réponse unique**

[3 points] On considère la fonction f qui à tout réel $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Déterminer $f(x) + 4f'(x)$.

A - $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

B - $\dfrac{2x+1}{3}\sqrt{x-1}$

C - $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

D - $\dfrac{x+1}{3}\sqrt{x-1}$

E - Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 28 **Question à réponse unique**

[3 points] On note $w(t) = f\left(u(t), v(t)\right)$ avec $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, $u(t) = 3\sin(2t)$ et $v(t) = 4\cos(2t)$. Calculer la dérivée $w'(t)$.

A - $-72\cos(2t)^2 - 92\cos(2t)\sin(2t) + 72\sin(2t)^2$

B - $-72\cos(2t)^2 + 164\cos(2t)\sin(2t) + 72\sin(2t)^2$

C - $72\cos(2t)^2 + 164\cos(2t)\sin(2t) - 72\sin(2t)^2$

D - $72\cos(2t)^2 + 92\cos(2t)\sin(2t) - 72\sin(2t)^2$

E - Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 29 — **Question à réponse unique**

[2 points] La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $Q(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2(x+1)}$ vaut

A - ○ $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

B - ○ $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

C - ○ $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$

D - ○ $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Question 30 — **Question à réponse unique**

[2 points] Un primitive sur l'intervalle $]-1,1[$ de la fraction rationnelle $Q(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2(x+1)}$ vaut

A - ○ $-\dfrac{2}{x-1} + \ln(x+1) - \ln(1-x)$

B - ○ $-\dfrac{2}{x-1} + \ln(x+1) - \ln(x-1)$

C - ○ $\dfrac{2}{x-1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

D - ○ $\dfrac{2}{x-1} + \ln(1-x) - \ln(x+1)$

Question 31 — **Question à réponse unique**

[2 points] Un primitive sur l'intervalle $]1,+\infty[$ de la fraction rationnelle $Q(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2(x+1)}$ vaut

A - ○ $-\dfrac{2}{x-1} + \ln(x+1) - \ln(x-1)$

B - ○ $\dfrac{2}{x-1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

C - ○ $-\dfrac{2}{x-1} + \ln(x+1) - \ln(1-x)$

D - ○ $\dfrac{2}{x-1} + \ln(1-x) - \ln(x+1)$

Question 32 — **Question à réponse unique**

[3 points] En posant $Q(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2(x+1)}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} Q(x)\mathrm{d}x$

A - existe et vaut $2\ln(3) + \dfrac{8}{3}$.

B - existe et vaut $-2\ln(3) + \dfrac{8}{3}$.

C - existe et vaut $2\ln(3) - \dfrac{8}{3}$.

D - n'existe pas.

Question 33 — **Question valeur numérique**

[4 points] Déterminer une constante α pour que que la fonction $x \mapsto \alpha\exp(3x)$ soit une solution de l'équation différentielle

$$y' + y = 28\exp(3x).$$

Valeur de la constante α

Question 34 — **Question à réponse unique**

[2 points] On s'intéresse aux solutions quelconques de l'équation différentielle ordinaire
$y'' - y' + y = \exp(-x)$.

A - Si $f : x \mapsto f(x)$ est une solution de l'équation, alors, la limite de f en $+\infty$ vaut toujours 0.

B - Si $f : x \mapsto f(x)$ est une solution de l'équation, alors, la limite de f en $+\infty$ vaut toujours $+\infty$.

C - Si $f : x \mapsto f(x)$ est une solution de l'équation, alors, la limite de f en $+\infty$ vaut toujours $-\infty$.

D - Si $f : x \mapsto f(x)$ est une solution de l'équation, alors, la limite de f en $+\infty$ n'est jamais définie.

E - Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 35 — **Question à réponse unique**

[2 points] On exécute les instructions suivante, écrites en langage Python.

```
S = 1
t = 1
for n in range(1,1000):
   t = t/n
   S = S+t
S
```

Quelle est la valeur de S à l'issue du programme ?

A - 2.71828182845905

B - 2.0

C - 3.14159265358979

D - 2.23606797749979

E - Aucune des autres réponses n'est juste.

Question 36 — **Question à réponse unique**

[2 points] La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n\pi) - \sin(n\pi)|}{n^2}$

A - converge car le terme général est positif.

B - converge car le terme général est dominé par $\dfrac{1}{n^2}$.

C - converge et vaut $6\pi^2$.

D - ne converge pas.

Question 37 — **Question valeur numérique**

[4 points] On a lancé deux dés équilibrés à 20 faces numérotées de 1 à 20. Calculer la probabilité p que l'un des dés ait donné la valeur 3, sachant que la somme des jets vaut 11 et en déduire la valeur de $100 \cdot p$.

La valeur de $100 \cdot p$ vaut

Question 38 — **Question valeur numérique**

[4 points] Une boîte contient un total de douze pièces : six vis et six écrous. Précisément, il y a une vis et un écrou de dimension d_1, une vis et un écrou de dimension d_2, etc. Les six dimensions sont toutes deux à deux distinctes. On tire deux pièces au hasard. Calculer un entier naturel m tel que la probabilité de pouvoir reconstituer un boulon est exactement $\dfrac{1}{m}$.

La valeur de m vaut

Question 39 **Question valeur numérique**

[5 points] Une loueuse de montgolfières dispose de deux montgolfières. Chaque montgolfière est disponible 4 jours sur 5 en moyenne. La loueuse loue chaque montgolfière pour 250 EUR par jour pour la totalité de la journée. On note $X \in \{0,1,2,3\}$ le nombre de clients qui se présentent par jour. Un client utilise une et une seule montgolfière. On suppose que X suit la distribution

$$P(X=0)=\frac{1}{10}, \quad P(X=1)=\frac{3}{10},$$
$$P(X=2)=\frac{4}{10}, \quad P(X=3)=\frac{2}{10}.$$

Quel est le bénéfice moyen par jour (en supposant que tous les événements sont indépendants entre eux) ?

Le bénéfice moyen par jour est

Question 40 **Question valeur numérique**

[5 points] L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat ne connaisse pas la vraie réponse est p. Déterminer un entier naturel y tel que, si $p \leq \frac{1}{y}$, alors le candidat donnera en moyenne au moins 38 bonnes réponses.

Valeur de y